




Osnovi računarstva I

Minimizacija prekidačkih funkcija

- Određivanje najjednostavnijeg mogućeg izraza koji odgovara nekoj Bulovoj funkciji naziva se *minimizacijom*
- Minimizaciju funkcije sa malim brojem (ne više od 5) promjenljivih pogodno je izvršiti preko **Karnoovih mapa**
- Karnoova mapa (K mapa) za funkciju sa n promjenljivih sastoji se od 2^n kvadratnih polja koja predstavljaju elementarne površine
- Svako elementarnoj površini (polju) odgovara jedan **potpuni logički proizvod (minterm)**, odnosno **potpuni logički zbir (maksterm)**, tj. jedan indeks
- Za funkciju 4 promjenljive:
 - Svaka promjenljiva u mapi ima svoj značaj (X_1 najveći, X_4 najmanji)

		X_3X_4			
		00	01	11	10
X_1X_2	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

- 
- Potrebno je sve jedinice (ako se želi dobiti minimalna forma u obliku proizvoda zbirava), odnosno nule (ako se želi dobiti minimalna forma u obliku proizvoda zbirava), u mapi pokriti površinama koje obuhvataju tzv. susjedna polja
 - Susjedna polja su ona polja čiji se mintermovi, odnosno makstermovi, razlikuju u jednom bitu
 - Prilikom izbora površina kojima će se pokriti polja na kojima se nalaze jedinice (odnosno nule) mora se voditi računa o nekoliko prostih pravila:
 - zaokružuju se susjedna polja što je moguće većom površinom pri čemu broj pokrivenih polja mora biti jednak 2^n , gdje je $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$;
 - broj površina mora biti što je moguće manji;
 - preporučuje se da se zaokruživanje **započne** od onih jedinica (odnosno nula) koje mogu da se zaokruže samo na jedan način!

- Pretpostavimo da je Karnoovom mapom sa slike zadata logička funkcija f:

		zp			
		00	01	11	10
xy	00	0	0	0	0
	01	1	1	0	0
	11	0	0	1	1
	10	0	0	1	1

Diagram showing a 4x4 Karnaugh map for function f. The map is labeled with 'xy' on the vertical axis and 'zp' on the horizontal axis. The values in the cells are: (00,00)=0, (00,01)=0, (00,11)=0, (00,10)=0; (01,00)=0, (01,01)=1, (01,11)=0, (01,10)=0; (11,00)=0, (11,01)=0, (11,11)=1, (11,10)=1; (10,00)=0, (10,01)=0, (10,11)=1, (10,10)=1. Two groups are circled: Group 1 (circled '1') includes the cells (01,01), (11,01), (10,01), and (00,01). Group 2 (circled '2') includes the cells (01,11), (11,11), (10,11), and (00,11).

- U obliku zbira potpunih proizvoda:

$$f = \bar{x} y \bar{z} \bar{p} + \bar{x} y \bar{z} p + x y z p + x y z \bar{p} + x \bar{y} z p + x \bar{y} z \bar{p}$$

- Grupisanjem prva dva minterma:

$$\begin{aligned} f &= \bar{x} y \bar{z} (\bar{p} + p) + x y z p + x y z \bar{p} + x \bar{y} z p + x \bar{y} z \bar{p} = \\ &= \bar{x} y \bar{z} + x y z p + x y z \bar{p} + x \bar{y} z p + x \bar{y} z \bar{p} \end{aligned}$$

- Grupisanjem poslednja četiri minterma:

$$\begin{aligned} f &= \bar{x} y \bar{z} + x z (y p + y \bar{p} + \bar{y} p + \bar{y} \bar{p}) = \bar{x} y \bar{z} + x z (y(p + \bar{p}) + \bar{y}(p + \bar{p})) = \\ &= \bar{x} y \bar{z} + x z (y + \bar{y}) = \bar{x} y \bar{z} + x z \end{aligned}$$

- Pretpostavimo da je Karnoovom mapom sa slike zadata logička funkcija f:

xy \ zp		zp			
		00	01	11	10
xy	00	1	0	0	0
	01	1	0	1	0
	11	1	0	1	0
	10	1	0	0	0

Diagram showing a 4x4 Karnaugh map for function f. The map has two groups of 1s circled with dashed lines: Group 1 (labeled '1') covers the first column (z=0, p=0) and Group 2 (labeled '2') covers the third column (z=1, p=0). Arrows point from the labels to their respective groups.

$$f = \bar{z} \cdot \bar{p} + y \cdot z \cdot p$$

- Pretpostavimo da je Karnoovom mapom sa slike zadata logička funkcija f:

xy \ zp		zp			
		00	01	11	10
xy	00	0	1	1	0
	01	0	1	1	1
	11	0	1	1	1
	10	0	1	1	0

Diagram showing a 4x4 Karnaugh map for function f. The map has two groups of 1s circled with dashed lines: Group 1 (labeled '1') covers the second and third columns (z=0, p=1) and Group 2 (labeled '2') covers the third and fourth columns (z=1, p=0). Arrows point from the labels to their respective groups.

$$f = p + yz$$

Karnoove mape sa f-je sa dvije promjenljive

- Za Bulovu funkciju sa dvije promjenljive definišu se četiri minterma - mapa se sastoji od četiri polja:

		Y	
		0	1
X	0	$\bar{X}\bar{Y}$	$\bar{X}Y$
1	1	$X\bar{Y}$	XY

m_0	m_1
m_2	m_3

Funkcija XY

		Y	
		0	1
X	0		
1	1		1

Funkcija $F(X, Y) = \sum m(1,2) = \bar{X}Y + X\bar{Y}$

		Y	
		0	1
X	0		1
1	1	1	

- *Primjer:* Odrediti minimalni oblik logičke funkcije zadate izrazom:

$$F(X, Y) = \sum m(1,2,3) = m_1 + m_2 + m_3$$

- *Rješenje:* Minimalni oblik funkcije možemo odrediti na tri načina:

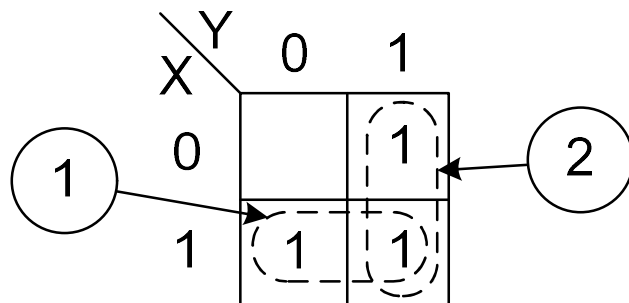
1. **Algebarski:**

$$F = \bar{X} \cdot Y + X \cdot \bar{Y} + X \cdot Y = \bar{X} \cdot Y + X \cdot (\bar{Y} + Y) = \bar{X} \cdot Y + X = \\ = \bar{X} \cdot Y + X \cdot (1 + Y) = \bar{X} \cdot Y + X + X \cdot Y = Y \cdot (\bar{X} + X) + X = X + Y$$

2. **Proizvodom potpunih logičkih zbirova (makstermova):**

$$F = \prod M(0) = X + Y.$$

3. **Upotrebom Karnoove mape:**



$$F = X + Y$$

Karnoove mape za f-je sa tri promjenljive

- U slučaju logičke funkcije sa tri promjenljive postoji osam mintermova - osam polja

X \ YZ	00	01	11	10
0	m ₀	m ₁	m ₃	m ₂
1	m ₄	m ₅	m ₇	m ₆

- Posmatrajmo logički zbir četiri minterma koji se nalaze u susjednim poljima Karnoove mape:

$$\begin{aligned} m_1 + m_3 + m_5 + m_7 &= (\bar{X}\bar{Y}Z + \bar{X}YZ) + (X\bar{Y}Z + XYZ) = \\ &= \bar{X}Z(\bar{Y} + Y) + XZ(\bar{Y} + Y) = \bar{X}Z + XZ = Z \end{aligned}$$

Karnoove mape za f-je sa četiri promjenljive

- Četiri promjenljive - šesnaest mintermova

- *Primjer.* Odrediti minimalnu formu funkcije:

$$f(D, C, B, A) = CBA + D\bar{C}\bar{B} + CB\bar{A}$$

- *Rješenje:*

$$f(D, C, B, A) = (D + \bar{D})CBA + D\bar{C}\bar{B}(A + \bar{A}) + (D + \bar{D})CB\bar{A} =$$

$$= m_{15} + m_7 + m_9 + m_8 + m_{14} + m_6 = \sum m(6,7,8,9,14,15)$$

		BA			
		00	01	11	10
DC	00	0	1	3	2
	01	4	5	7 (1)	6 (1)
	11	12	13	15 (1)	14 (1)
	10	8 (1)	9 (1)	11	10

Diagram showing a 4x4 Karnaugh map for variables D, C, B, A. The map is labeled with DC on the vertical axis and BA on the horizontal axis. The cells are numbered 0 through 15. The function f(D, C, B, A) is represented by 1s in cells 6, 7, 8, 9, 14, and 15. Two groups are circled: Group 1 (circled '1') covers cells 8 and 9, and Group 2 (circled '2') covers cells 6 and 7. Dashed lines indicate the groupings.

DC \ BA		BA			
		00	01	11	10
00	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
11	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

A 4x4 Karnaugh map for variables D, C, B, and A. The map is labeled with DC on the vertical axis and BA on the horizontal axis. The cells are numbered 0 through 15. The map shows two groups of 1s:

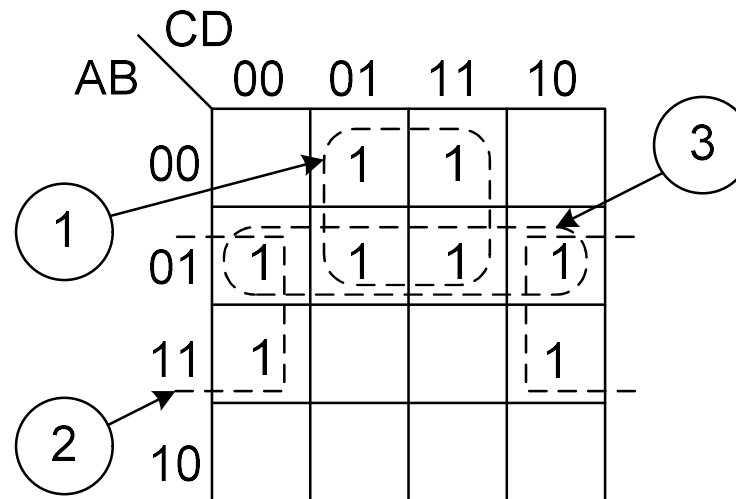
- Group 1 (circled '1'): A 2x2 square of 1s in the bottom-left corner, covering cells (10,00), (10,01), (11,00), and (11,01). This group is labeled with a circled '1' and an arrow pointing to cell (10,00).
- Group 2 (circled '2'): A 2x2 square of 1s in the top-right corner, covering cells (01,11), (01,10), (11,11), and (11,10). This group is labeled with a circled '2' and an arrow pointing to cell (01,10).

$$m_{8,9} = D\bar{C}\bar{B}\bar{A} + D\bar{C}\bar{B}A = D\bar{C}\bar{B}(\bar{A} + A) = D\bar{C}\bar{B}$$

$$\begin{aligned}
 m_{6,7,14,15} &= \bar{D}C\bar{B}\bar{A} + \bar{D}CBA + DC\bar{B}\bar{A} + DCBA = \bar{D}CB(\bar{A} + A) + DCB(\bar{A} + A) = \\
 &= \bar{D}CB + DCB = CB(\bar{D} + D) = CB
 \end{aligned}$$

$$f(D, C, B, A) = D\bar{C}\bar{B} + CB$$

Primjer:



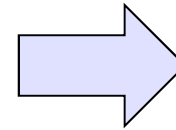
$$F = \bar{A}D + B\bar{D}$$

Skupovi 1 i 2 su **bitni**, jer se mintermovi m_1 i m_3 obuhvataju samo sa skupom zapisanim ekvivalentnim logičkim izrazom $\bar{A}D$, odnosno mintermovi m_{12} i m_{14} se obuhvataju samo sa skupom zapisanim ekvivalentnim logičkim izrazom $B\bar{D}$

Skup 3 je **nebitan** (svi njegovi mintermovi obuhvaćeni su sa prva 2 skupa)

■ *Primjer:*

		CD			
	AB	00	01	11	10
00	1				
01		1			
11	1	1	1		
10			1	1	



		CD			
	AB	00	01	11	10
00	1				
01		1			
11	1	1	1		
10			1	1	

bitni skupovi

		CD			
	AB	00	01	11	10
00	1				
01		1			
11	1	1	1		
10			1	1	

nebitni skupovi

$$F = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{B}\overline{C}D + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \begin{cases} ACD \\ ili \\ ABD \end{cases}$$

- *Primjer:* Naći minimalnu formu funkcije zadate logičkim izrazom:

$$F(A, B, C, D) = \sum m(0,1,2,5,8,9,10)$$

u obliku **proizvoda logičkih zbirova**

- *Rješenje:*

AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	1	0	1
	01	0	1	0	0
	11	0	0	0	0
	10	1	1	0	1

Diagram showing a 4x4 Karnaugh map for variables A, B, C, and D. The map is labeled with AB on the vertical axis and CD on the horizontal axis. The cells contain values 1 or 0. Three groups of cells are circled and labeled with numbers 1, 2, and 3. Group 1 is a 2x2 square of 0s in the bottom two rows and the last two columns. Group 2 is a 2x2 square of 1s in the top two rows and the first two columns. Group 3 is a 2x2 square of 1s in the bottom two rows and the first two columns. Arrows point from the circled numbers to their respective groups.

$$F = (\bar{A} + \bar{B}) \cdot (\bar{C} + \bar{D}) \cdot (\bar{B} + D)$$

- *Primjer*: Naći minimalnu formu funkcije zadate logičkim izrazom:

$$F(A, B, C, D) = (\bar{A} + \bar{B} + C) \cdot (B + C + D) \cdot (B + \bar{C} + D)$$

- *Rješenje*:

$$\begin{aligned} F &= (\bar{A} + \bar{B} + C) \cdot (B + C + D) \cdot (B + \bar{C} + D) = (\bar{A} + \bar{B} + C + D) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C + \bar{D}) \cdot \\ &\cdot (\bar{A} + B + C + D) \cdot (A + B + C + D) \cdot (\bar{A} + B + \bar{C} + D) \cdot (A + B + \bar{C} + D) = \\ &= \prod M(0, 2, 8, 10, 12, 13). \end{aligned}$$

AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
00	00	0			0
	01				
11	11	0	0		
	10	0			0

Diagram showing a 4x4 Karnaugh map for variables A, B, C, and D. The map is labeled with AB on the vertical axis and CD on the horizontal axis. The cells are labeled with their corresponding binary values (00, 01, 11, 10). The cells containing 0 are circled, and the cells containing 1 are circled. The circled 0s are at (00,00), (11,11), (10,00), and (10,10). The circled 1s are at (11,11) and (10,10).

$$F(A, B, C, D) = (B + D) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C)$$

- *Primjer.* Pronađi minimalnu formu **nekompletno definisane** funkcije F, sa tri "bilo što" uslova:

$$F(A, B, C, D) = \sum m(1,3,7,11,15) + \times (0,2,5).$$

- *Rješenje:*

AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
AB	00	X	1	1	X
	01	0	X	1	0
	11	0	0	1	0
	10	0	0	1	0

Diagram showing Karnaugh map with groupings: Group 1 (circled) covers cells (00,00), (01,00), (11,00), (10,00). Group 2 (circled) covers cells (11,00), (11,01), (11,11), (11,10).

$$F = \bar{A}\bar{B} + CD$$

AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
AB	00	X	1	1	X
	01	0	X	1	0
	11	0	0	1	0
	10	0	0	1	0

Diagram showing Karnaugh map with groupings: Group 1 (circled) covers cells (00,00), (01,00), (11,00), (10,00). Group 2 (circled) covers cells (01,00), (01,01), (11,00), (11,01).

$$F = \bar{A}D + CD$$

AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
AB	00	X	1	1	X
	01	0	X	1	0
	11	0	0	1	0
	10	0	0	1	0

Diagram showing Karnaugh map with groupings: Group 1 (circled) covers cells (11,00), (11,01), (11,11), (11,10). Group 2 (circled) covers cells (00,00), (01,00), (10,00), (11,00).

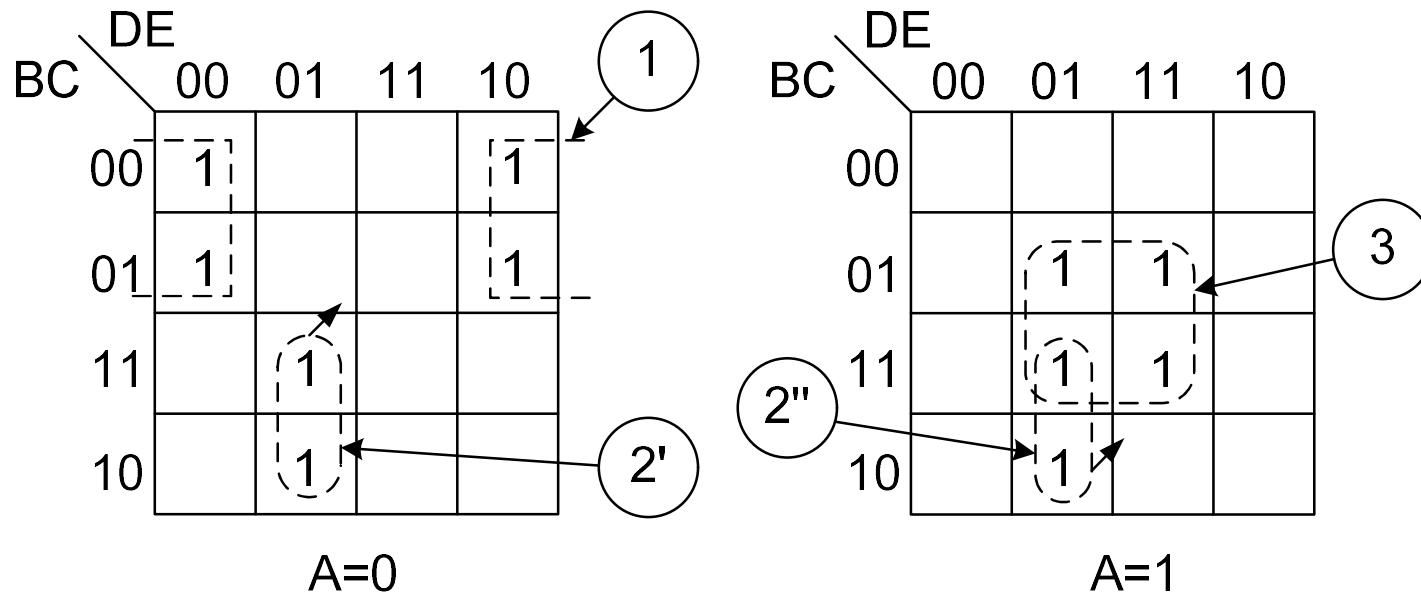
$$F = D \cdot (\bar{A} + C)$$

Karnoove mape za f-je sa pet promjenljivih

- *Primjer.* Pronaći uprošćeni oblik funkcije zadate logičkim izrazom:

$$F(A, B, C, D, E) = \sum m(0, 2, 4, 6, 9, 13, 21, 23, 25, 29, 31)$$

- *Rješenje:*



$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{E} + B\bar{D}E + ACE$$



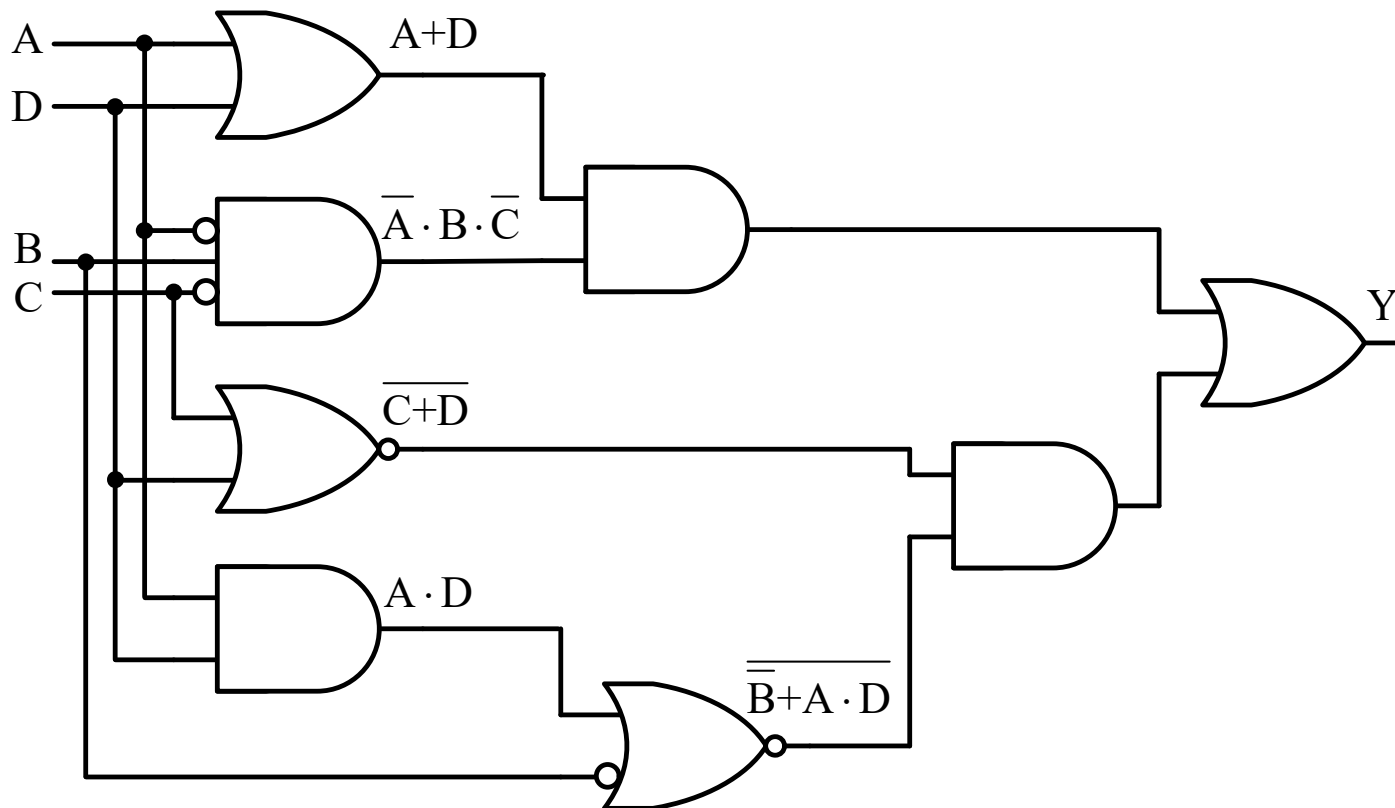
Osnovi računarstva I

Prekidačke mreže

- Posmatrajmo sljedeću složenu prekidačku funkciju:

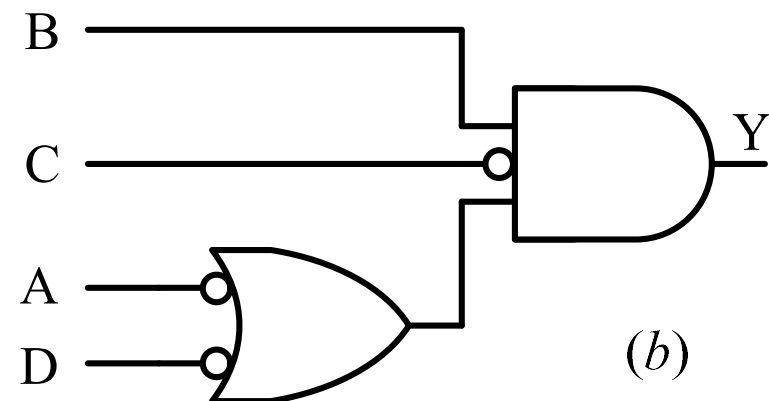
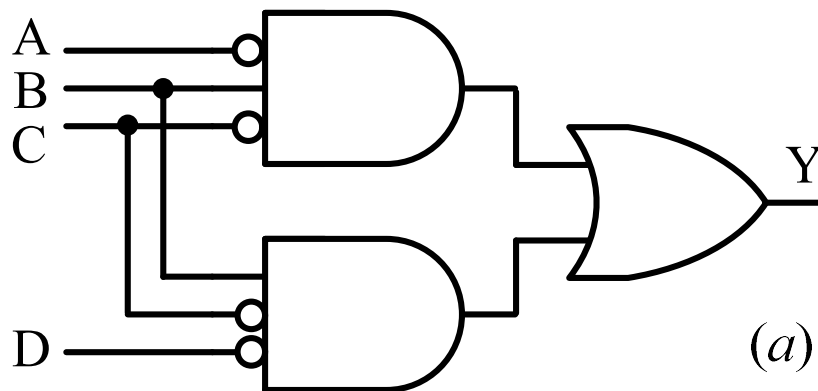
$$Y = (A + D) \cdot \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \overline{C + D} \cdot \overline{B + A \cdot D}$$

- Logička šema prekidačke mreže može se dobiti **direktnim preslikavanjem** prekidačke funkcije u odgovarajući dijagram elementarnih logičkih kola:

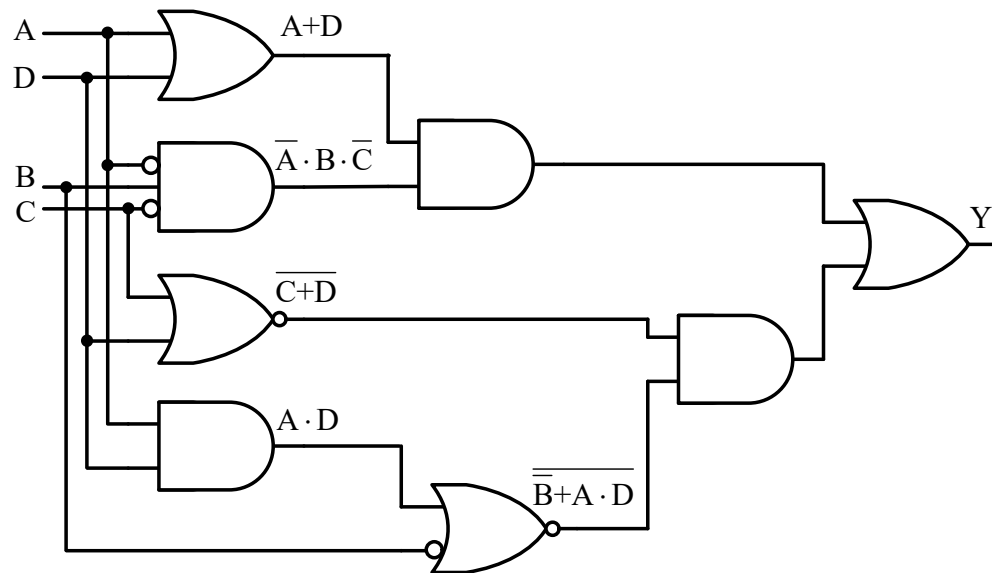


- Izlaz Y iste logičke vrijednosti veoma često se može realizovati pomoću jednostavnije mreže logičkih kola (realizacijom ekvivalentne prekidačke f-je dobijene minimizacijom, algebarski ili pomoću Karnoovih mapa):

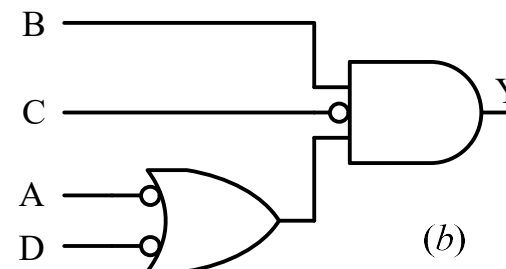
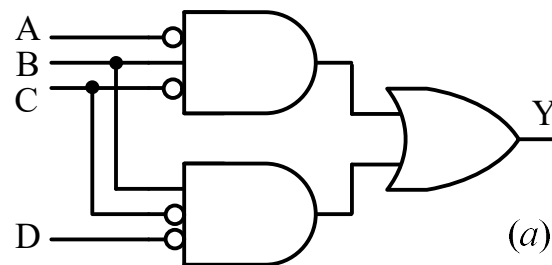
$$Y = \bar{A}B\bar{C} + B\bar{C}\bar{D} = B\bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{D})$$



- Prekidačke mreže za implementaciju funkcije ne razlikuju se samo u pogledu broja i tipa upotrijebljenih logičkih elemenata, već i po broju nivoa (**stepeni**) u strukturi mreže
- Stepen prekidačke mreže određen je najvećim brojem redno vezanih log. kola kroz koja neki od ulaznih signala treba da prođe do izlaza mreže
- Četvorostepena:



- Dvostepene:





REALIZACIJA NORMALNIH FORMI PREKIDAČKIH FUNKCIJA UPOTREBOM LOGIČKIH NI I NILI KOLA

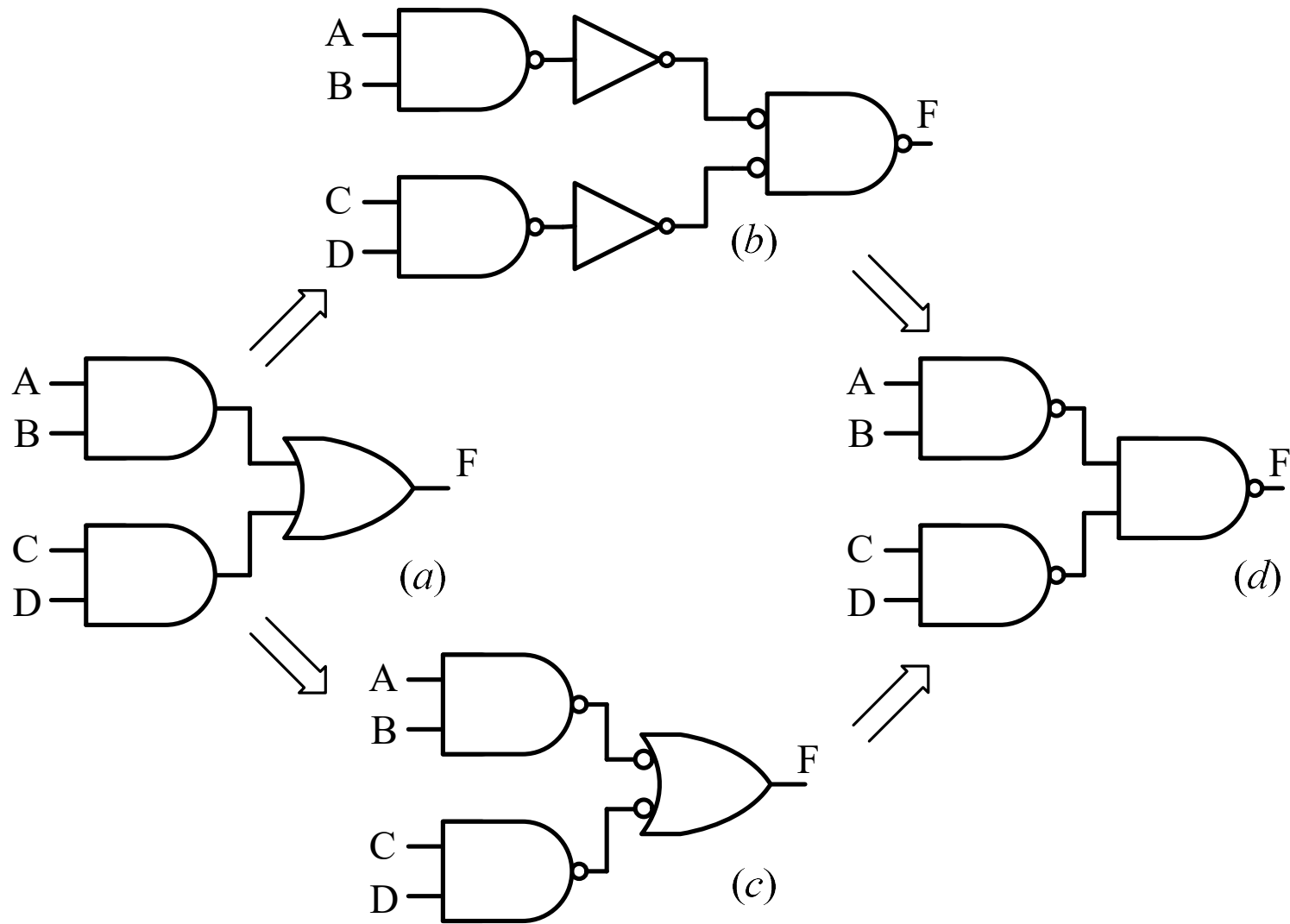
- U slučaju logičke funkcije oblika zbira logičkih proizvoda, implementacija **dvostepene** prekidačke mreže može se izvršiti **upotrebom isključivo logičkih NI kola**:

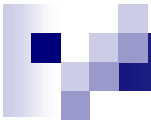
$$F = A \cdot B + C \cdot D = \overline{\overline{A \cdot B}} + \overline{\overline{C \cdot D}} = \overline{\overline{A \cdot B \cdot C \cdot D}}$$

- Analogno tome, funkcije oblika proizvoda logičkih zbirova mogu se implementirati **dvostepenom** prekidačkom mrežom, **koristeći isključivo logička NILI kola**.

$$F = (A + B) \cdot (C + D) = \overline{\overline{A + B}} \cdot \overline{\overline{C + D}} = \overline{\overline{A + B + C + D}}$$

$$F = A \cdot B + C \cdot D$$





$$F = (A + B) \cdot (C + D)$$

